7. 一般化サレタ Peano curve 一ツ

井関清志

(10月28日受付)

H. Lebesgue, B. Jessen, W. Sierpinski 等ニヨッテ一般化サレタ Peano curve ガエラレテヰル。コノ note ノ目的ハ、カカル curve デ一ツ与ヘルコトニアル。即チ閉区間 $0 \leq t \leq 1$ デ定義サレタ値域ガ閉区間 $0 \leq a_n \leq$ ニアル可附番ケノ一価連続函数 $\{\varphi_n(t)\}$ ガアリ、$0 \leq a_n \leq 1$ $(n=1, 2, 3 \cdots)$ ナル系列 $\{a_n\}$ ヲ与ヘルト

$$\varphi_n(t^*) = a_n \qquad (n=1, 2, 3 \cdots)$$

ナル $0 \leq t^* \leq 1$ ガ少クトモ一ツ存在スル。コレガ一般化サレタ Peano curve デアル。

$\varphi_n(t)$ ヲ作ルタメニ補助函数 $x(t)$ ヲ次ノヤウニ定義スル。$x(t)$ ハ $0 \leq t$ デ定義サレタ一価連続函数デ

$$x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 0 & 2n - \frac{1}{3} \leq t \leq 2n + \frac{1}{3} \\ & (n=1, 2, 3, \quad) \\ 1 & 2n + \frac{2}{3} \leq t \leq 2n + \frac{4}{3} \\ & (n = 0, 1, 2 \quad) \end{cases}$$

ソノ他ノ t ニ対シテハ $x(t)$ ガ一価連続且 $0 \leq x(t) \leq 1$ ニナルヤウニシテオク。次ニ $\varphi_n(t)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ ヲ

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2^2} x(3^2 t) + \frac{1}{2^3} x(3^4 t) +$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2} x(3t) + \frac{1}{2^2} x(3^5 t) + \frac{1}{2^2} x(3^7 t) + \cdots$$

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{2} x(3^3 t) + \frac{1}{2^2} x(3^{11} t + \frac{1}{2^3} x(3^{19} t) +$$

ト定義スレバ コレガ求メルモノデアル。$\varphi_n(t)$ ガ $0 \le t \le 1$ デ一價連續且 $0 \le \varphi_n(t) \le 1$ ハ明カデアラウ。次ニ $0 \le a_n \le 1$ $(n=1,2,\cdots)$ ナル系列 $\{a_n\}$ ヲトレバ

$$\varphi_n(t^*) = a_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

ナル $0 \le t^* \le 1$ ノ存在ヲ示サウ。

a_n ヲ二進展開シテ、

$$a_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2^2}t_3 + \frac{1}{2^2}t_5 + \cdots\cdots$$

$$a_2 = \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2^2}t_6 + \frac{1}{2^3}t_{10} + \cdots\cdots$$

$$a_3 = \frac{1}{2}t_4 + \frac{1}{2^2}t_{12} + \frac{1}{2^4}t_{20} + \cdots$$

トシ t^* トシテ

$$t^* = \frac{2}{3}t_1 + \frac{2}{3^2}t_2 + \cdots\cdots$$

トオケバ

$$\varphi_n(t^*) = a \quad (n=1,2,3\cdots\cdots)$$

デアル。何者ノ

$$3^k t^* = 2(3^{k-1}t_1 + \cdots + 3t_{k-1} + t_k) + \frac{2}{3}t_{k+1} + \cdots \quad (k=1,2,\cdots)$$

モシ $t_{k+1} = 0$ ナラバ $x(t)$ ノ定義ニヨリ $x(3^k t^*) = 0$
又 $t_{k+1} = 1$ ナラバ $x(3^k t^*) = 1$ 何レニシテモ

$$x(3^k t^*) = t_{k+1}$$

即チ $\varphi_n(t)$ ノ定義ニヨリ

$$\varphi_n(t^*) = a_n \quad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

(終)